# Теоретичні відомості

(У вас це 2й розділ, тому нумерація буде вірною) Квадратичну систему з *n* лінійних рівнянь можна задати наступним чином:

|  |
| --- |
| (2.1) |

де:

, ,

Тоді якщо , то система (2.1) має розв’язок та він єдиний. Якщо система має єдиний розв’язок, то його можна знайти одним із наступних методів.

## Метод Якобі

Сутність методу Якобі полягає в тому, що матриця розбивається на дві матриці: діагональну матрицю та матрицю . Тобто:

,

Тоді систему (2.1) можна переписати у наступному вигляді:

|  |
| --- |
| (2.2) |

Помноживши систему (2.2) зліва на отримаємо:

|  |
| --- |
| (2.3) |

Якщо відоме певне наближення , тоді від виразу (2.3) можна перейти до наступної ітераційної форми [1]:

Або

Метод Якобі для системи (2.1) є збіжним для довільного початкового наближення тоді і тільки тоді, коли матриця має домінантну головну діагональ [1][2]. Тобто:

Умова завершення ітераційного процесу Якобі при досягнені точності у спрощеній формі має вигляд [1]:

## Метод Гауса-Зейделя

Сутність методу Гауса-Зейделя полягає в тому, що матриця розбивається на три матриці: діагональну матрицю , верхню трикутною та нижню трикутною. Тобто:

, ,

Тоді систему (2.1) можна переписати у наступному вигляді:

|  |
| --- |
| (2.4) |

Якщо відоме певне наближення , тоді від виразу (2.4) можна перейти до наступної ітераційної форми, яка задана системою [3][4]:

,

де , , ,

або

Метод Гауса-Зейделя для системи (2.1) є збіжним для довільного початкового наближення тоді і тільки тоді, коли матриця має домінантну головну діагональ або матриця додатньо визначна [1][2].

Умова завершення ітераційного процесу Гауса-Зейделя при досягнені точності у спрощеній формі має вигляд [1]:

## Метод градієнтного спуску (спряжених градієнтів)

Якщо матриця симетрична та додатньо визначена, то розв’язок системи (2.1) можна знайти методом приєднаних градієнтів.

Процес пошуку розв’язку полягає в мінімізації наступного функціоналу [1][3][6]:

За позначено скалярний добуток.

Якщо являє собою взаємно приєднаних векторів, то утворює базис для простору і можна виразити рішення системи в даному базисі:

Нескладними математичними перетвореннями з виразу (2.5) отримаємо:

Вираз (2.6) дає нам наступний метод рішення системи (2.1): найти послідовність приєднаних векторів-напрямків, а потім обчислити їх коефіцієнт .

Якщо відоме певне наближення . Тоді для кроку алгоритму маємо [1][3][6]:

де – розв’язок системи (2.1) на -тому кроці, – вектор напрямку на   
-тому кроці, – нев’язка на -тому кроці.

Для довільного початкового наближення вищеописаний алгоритм буде працювати за умови, що матриця симетрична, додатньо визначена [3][6] та:

Умова завершення ітераційного процесу градієнтного спуску при досягнені точності у спрощеній формі має вигляд [3][6]: